

II Encuentro de Enseñanza de la Matemática UNED 2008.

ABRACADABRA: SUMEMOS POLINOMIOS

Ana Cecilia Durón González, Grettel León Arguedas

Universidad Estatal a Distancia

Escuela de Matemática

Email: cedugo@costarricense.cr, grettella@gmail.com

1. RESUMEN

En este trabajo se presenta una propuesta en la que se utiliza material concreto para la enseñanza del álgebra en octavo año de la enseñanza media costarricense que se aplicó en dos instituciones del cantón de Pérez Zeledón.

2. Palabras clave

Desarrollo intelectual, álgebra, estrategias metodológicas, material concreto.

3. OBJETIVOS

Al utilizar figuras geométricas para introducir específicamente los temas de suma y resta de monomios y polinomios se espera que el estudiante logre:

- Representar diferentes monomios
- Interiorizar el concepto de monomios semejantes.
- Sumar o restar monomios de forma intuitiva.
- Deducir el algoritmo para sumar o restar monomios semejantes.
- Representar polinomios.
- Representar la suma o resta de polinomios
- Sumar o restar polinomios de forma intuitiva.
- Deducir el algoritmo para sumar o restar polinomio.

4. MARCO TEÓRICO

El estudio del desarrollo del ser humano se puede plantear desde diferentes perspectivas o teorías. Dentro de estas puede mencionarse las del psicólogo suizo Jean Piaget, cuyo enfoque hace énfasis en el desarrollo intelectual. Para Piaget: “el desarrollo intelectual es un proceso que sigue un camino ordenado, sistemático y secuencial”: citado por (Abarca, 1992, Pág. 61).

Deja claro lo anterior que el desarrollo intelectual del ser humano se alcanza a lo largo de un proceso que tiene una continuidad y sucesión ordenada.

Piaget señaló cuatro grandes etapas en el desarrollo del niño.

- Sensomotriz.
- Preoperatoria
- Operaciones concretas
- Operaciones formales

Según lo expuesto por Abarca (1992) las tres primeras etapas se caracterizan según se detalla a continuación:

En la etapa sensomotriz (del nacimiento a los dos años) dominan las impresiones sensoriales y la actitud motora. Es el período anterior a la adquisición del lenguaje verbal. Durante esa etapa el niño hace uso de su cuerpo para comunicarse; es a través de sus movimientos y sensaciones que conoce el mundo que le rodea.

La etapa preoperatoria (de los dos a los siete años) se caracteriza porque el niño puede usar imágenes o símbolos, aunque no tienen pensamiento lógico. El niño preoperatorio investiga continuamente explorando el mundo que lo rodea. El desarrollo del lenguaje le permite mayor comunicación, además el niño adquiere una mayor comprensión de las palabras y los conceptos lo que le permite describir el mundo que lo rodea tanto como sus propios pensamientos y sentimientos.

En la etapa de las operaciones concretas (de los siete a los once años) el niño paulatinamente adquiere el concepto de conservación de cantidad, aplicable a conceptos como masa, longitud, peso, área y volumen. Así por ejemplo al convertir una tira larga de plastilina en una bola el niño es capaz de explicar que tienen la misma masa. Puede asimismo, clasificar objetos por formas, color, tamaño, etc.

Según lo expuesto por Papalia y Wendkos (1996) la etapa de las operaciones formales es un nivel cognoscitivo que se alcanza generalmente en la adolescencia temprana (12 años aproximadamente).

Los adolescentes entran al más alto nivel de desarrollo cognoscitivo, el cual se caracteriza por la capacidad para el pensamiento abstracto. El logro de las operaciones formales les da una nueva manera para manipular u operar información; pueden trabajar con abstracciones, probar hipótesis y ver infinitas posibilidades. Así puede pensar en términos abstractos y depender menos del apoyo empírico concreto.

En esta etapa el ser humano es por primera vez capaz de aplicar el razonamiento hipotético deductivo lo que le permite ver diferentes posibilidades de solución de un problema.

Estos jóvenes son capaces de aplicar los procesos de pensamiento adquiridos a los problemas y situaciones de la vida diaria y además a la formulación de teorías filosóficas y políticas complejas.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente un niño está en capacidad de resolver problemas matemáticos que requieren cierta capacidad de abstracción hasta aproximadamente los doce años de edad.

En el área de la Matemática, específicamente el estudio del álgebra, requiere que el estudiante posea cierto nivel de abstracción de pensamiento o al menos que tenga la capacidad necesaria para desarrollarlo. Esto le permitiría entender tanto los problemas algebraicos que se le presenten como ser capaz de plantear y resolver problemas provenientes tanto de la cultura cotidiana como sistematizada aplicando las herramientas tan valiosas que posee esta disciplina. Así por ejemplo podrá traducir un problema expresado en lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico y viceversa.

En Costa Rica los programas de estudio para tercer ciclo introducen el tema del álgebra normalmente cuando los estudiantes apenas están alcanzando la etapa de las operaciones formales (en octavo año del III ciclo). En este momento el estudiante debe poseer la madurez necesaria para asimilar los nuevos conocimientos de manera que pueda aplicar el pensamiento formal cuando la situación lo requiera. Es pertinente que todos los involucrados en el proceso y especialmente el docente de matemática sea capaz de generar situaciones de aprendizaje que faciliten que el adolescente desarrolle el pensamiento formal.

Una persona en la etapa de las operaciones formales está mejor preparada para aplicar lo que ha aprendido en el pasado a sus situaciones presentes. Al tener una mayor capacidad de razonamiento es capaz de procesar información que luego puede ser usada para resolver problemas tanto de la cultura cotidiana como de la cultura sistematizada. Así, ella relaciona los contenidos por aprender y les da sentido a partir de los conocimientos que ya posee. De ahí que es esencial que el docente al planificar los procesos de enseñanza-aprendizaje tome en cuenta el hecho de que estos deben permitir al estudiante crear un enlace entre los conocimientos que ya posee con los que recién adquiere, que se de sentido a los nuevos contenidos a partir de su propia estructura conceptual.

Según el programa de estudios elaborado por el Ministerio de Educación de Costa Rica los números y reglas operativas estudiadas en la primaria y en séptimo año se retoman en octavo año para utilizarlas en el estudio del álgebra. Ésta extiende estos conceptos de modo

que es posible generalizar las reglas operativas para manipular otros símbolos y vocabulario matemático además de números y mecánica operacional. El estudiante debe además ser capaz de traducir situaciones expresadas en lenguaje cotidiano al lenguaje simbólico y ser capaz de interpretar este lenguaje.

El Programa de Estudios de Matemática para el III ciclo vigente en la actualidad expone al respecto:

“Este tema contiene una considerable labor de adiestramiento en el manejo de fórmulas. Esto tiene gran valor formativo, pues ayuda a desarrollar capacidades de abstracción y generalidad y, además, prepara al educando para el manejo de fórmulas que se le presentarán en otras áreas del conocimiento matemático y del conocimiento en general”. (Ministerio de Educación Pública, 2001, pág. 48).

El estudiante de octavo año apenas se inicia en el uso de letras y simbología algebraica. Al pasar de lo concreto a lo abstracto se parte de lo numérico como base para la construcción de los conceptos abstractos del álgebra. Es necesario que el estudiante visualice esta disciplina como una forma representativa general del contenido aritmético y que estos procesos de construcción del conocimiento ocurran de forma natural permitiendo la organización de ideas y formulación de algoritmos. Con base en las propuestas de Piaget puede afirmarse que el estudiante que inicia el estudio del álgebra debe haber alcanzado la etapa de las operaciones formales ya que debe poner en juego todas las destrezas cognitivas alcanzadas en el ciclo anterior además de la aplicación del pensamiento abstracto.

El trabajo en el aula con estudiantes de octavo año permite al docente verificar que éstos presentan serias dificultades para integrar las operaciones básicas estudiadas en la primaria y aplicarlas a operaciones propiamente algebraicas como la suma, resta y multiplicación de polinomios. Al resolver ecuaciones tienen dificultad para traducir lenguaje cotidiano a lenguaje algebraico. También se les dificulta manejar el concepto de cantidades variables y el uso de letras para representar un valor desconocido (incógnita).

De lo expuesto anteriormente nace la inquietud de investigar sobre el tema de estrategias metodológicas que se puedan aplicar para la enseñanza del álgebra en octavo año del III Ciclo de la Enseñanza General Básica y brindar un aporte que pueda mejorar el proceso enseñanza de este tema.

Por constituirse el álgebra en un campo de la matemática que requiere un nivel alto de abstracción, y debido a que existe poco material disponible en el mercado y en libros de texto

que contengan actividades propuestas para desarrollar adecuadamente los contenidos de la materia, se hace necesario que sea el docente el que diseñe e investigue sobre estrategias metodológicas adecuadas para que el proceso enseñanza aprendizaje en esta área se lleve a cabo de una manera significativa. El uso de material concreto para representar variables es una alternativa viable que puede utilizar el docente a fin de que el estudiante pueda explorar conceptos y tender un enlace entre un concepto y el símbolo utilizado para representarlo. El estudiante podrá inicialmente construir una imagen del concepto antes de iniciar la etapa de la representación simbólica de este. Además el uso de material concreto permitiría al estudiante de octavo año familiarizarse con el lenguaje y las operaciones algebraicas de una manera amena y significativa. Este hecho puede ayudarle a construir el conocimiento de tal manera que se le facilite interiorizar conceptos abstractos del álgebra al relacionarlos con situaciones concretas.

De manera que, frente al desafío de mejorar el proceso de enseñanza- aprendizaje del álgebra en octavo año se propone utilizar figuras geométricas como rectángulos y cuadrados elaborados en material concreto a fin de introducir en octavo año los temas de suma y resta de monomios y polinomios. Esquivel en la Antología de Matemática de Noveno Año expone: “los diferentes algoritmos de las operaciones con polinomios se pueden introducir mediante el uso de figuras geométricas, logrando así una mejor comprensión por parte de los estudiantes” (2000, pág148).

Se pretende que desde una perspectiva constructivista se facilite al estudiante una herramienta que le permita deducir los algoritmos para realizar las operaciones anotadas. Así el binomio juego-material concreto se convierte en un medio facilitador de nuevos descubrimientos y aprendizajes. Según la Revista UNESCO citada por Castillo y Espeleta el juego y manipulación de material concreto “contribuye a una mejor comprensión y a una mayor motivación, así como a una retención más duradera y a una mayor habilidad de transferencia”. (1996, pág. 215).

Por otra parte el docente debe diseñar estrategias de mediación que permitan desarrollar una acción mediadora en vez de una acción directiva y que se individualice al máximo el trabajo con los estudiantes. Suministrarle a los estudiantes material concreto que incluya una guía de trabajo que les permita trabajar en equipo y a partir de esta actividad deducir un algoritmo o un concepto promueve el trabajo colaborativo, se fomentan valores como el respeto, la tolerancia y la perseverancia; a la vez el estudiante participa directamente en el proceso de construcción del conocimiento.

5. MARCO METODOLÓGICO.

Inicialmente el presente trabajo de investigación implementó una propuesta para trabajar específicamente los objetivos y contenidos que se detallan a continuación del programa vigente de octavo año de la Unidad de Álgebra. Se utilizaron dos grupos de octavo año (8-1 y 8-2) en la Unidad Pedagógica Breinderhoff, localizada en los Chiles, Daniel Flores, Pérez Zeledón. A uno de estos grupos se le aplicó el experimento y el otro fungió como grupo de control. Además se aplica actualmente como parte de una práctica docente que se realiza en la Unidad Pedagógica Dr. Rafael Calderón Guardia, ubicada en San Isidro, Pérez Zeledón, con la sección 8-1.

OBJETIVO	CONTENIDO
1. Determinar la expresión algebraica que resulta de sumar o restar monomios, para expresar en forma simplificada los polinomios.	Suma y resta de monomios semejantes, que contienen a lo sumo tres variables.
2.. Sumar o restar polinomios, para resolver ejercicios que involucren este concepto.	Suma y resta de binomios y trinomios en a lo sumo dos variables

El fin fue diseñar actividades para introducir el algoritmo de la suma y resta de polinomios. Estas actividades requirieron el uso de material concreto, específicamente figuras geométricas como cuadrados y rectángulos contruidos a partir de material resistente (cartulina) Estas figuras ya han sido estudiadas por los estudiantes en el I y II ciclo por lo tanto ya están familiarizadas con el concepto y cálculo del área de estas figuras.

Se pretendió lograr una mayor comprensión por parte de los estudiantes, al permitirles trabajar con material concreto en un tema tan abstracto como es el Álgebra.

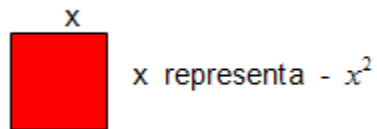
La información para diseñar esta propuesta metodológica se obtuvo del capítulo de Álgebra de la Antología de Matemática de Noveno Año (MEP, 2000, p 148).

El material que se utilizó fue cartulina de diferentes colores. Utilizando siempre el color rojo para simbolizar cantidades negativas (asociadas con la resta).

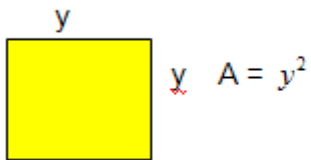
Se trabajó con el material que se describe a continuación.

- 1) Un cuadrado de color azul de lado "x" cuya área está representada por x^2 . Un cuadrado de color rojo de las mismas dimensiones representa $-x^2$.

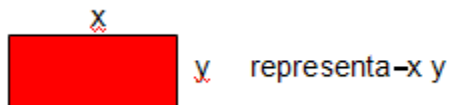
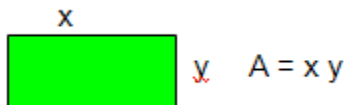
Así



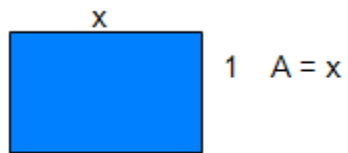
- 2) Un cuadrado amarillo de lado "y" cuya área está representada por y^2 .



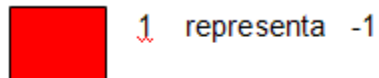
- 3) Un rectángulo color verde de lados "x" y "y" cuya área está representada por xy .



4) Un rectángulo celeste de lados x y 1 (uno), cuya área sea x .

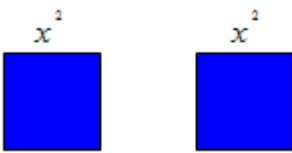


5) Un cuadrado de color blanco de lado igual a 1 (uno) de manera que su área sea igual a

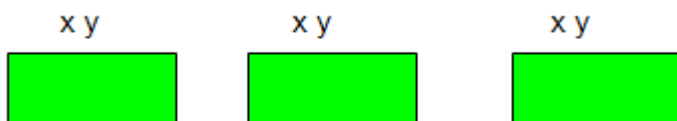


Se iniciará representando algunos monomios como ejemplo

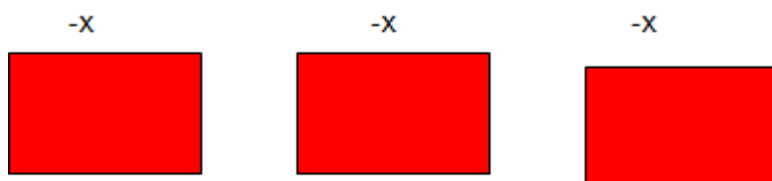
a) $2x^2$



b) $3xy$



c) $-3x$



Se solicitará a los estudiantes representar los siguientes monomios:

- a) $-3x^2$
- b) $5xy$
- c) $4x^2$
- d) $6y^2$
- e) 5
- f) -5
- g) $-4y^2$
- h) $-6xy$
- i) $4x$
- j) $-6x$

El cero se expresará mediante grupos de figuras que representen la misma cantidad pero con signo opuesto (Principio del cero).

Por ejemplo:

1) $x + -x^2 = 0$



2) $3xy - 3xy = 0$



SUMA Y RESTA DE MONOMIOS.

Para realizar la suma y resta de monomios se colocan juntas las figuras que representan monomios semejantes.

Ejemplo:

$$2x + 5xy - 3xy - 2x =$$



Contando figuras y aplicando el principio del cero se obtiene como resultado:

$$0x + 2xy = 2xy$$

Se solicitará a los estudiantes realizar las siguientes operaciones de sumas y resta de monomios utilizando fichas.

a) $3x^2 + 2x + 2x^2 - 5x$

b) $2x^2 + 3x^2 - 4x^2$

c) $3xy + x^2 - 2xy$

d) $2y^2 - 3xy + 5y^2 + 5xy + 4$

e) $3x^2 + 2x - 4x^2 + 5 - 3xy + 2 - x + 2xy$

f) $4y^2 - 5xy + 3y^2 - y^2 + 4x - 2 + 3$

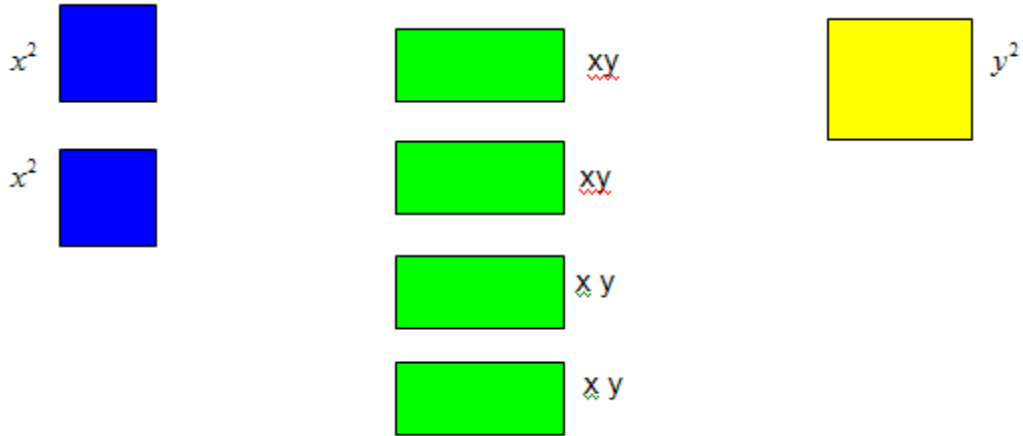
A partir de este punto se trabajará con el algoritmo para sumar y restar monomios tomando como base las actividades realizadas que permitan al estudiante deducir dicho algoritmo.

SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS.

Se iniciará representando polinomios como por ejemplo:

$$2x^2 + 4xy + y^2$$

Para representar dicho polinomio se utilizará el siguiente arreglo de las figuras dibujadas anteriormente, se utilizarán sólo figuras de color azul, verde y amarillo, por ser todas cantidades positivas. (En el caso de representar cantidades negativas se usará el color rojo).



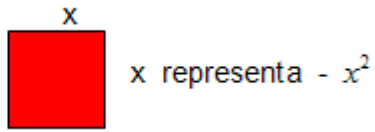
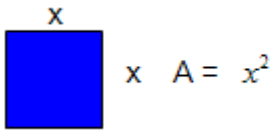
Se solicitará a los estudiantes representar polinomios como los que se anotan a continuación (en a lo sumo dos variables):

- a) $x^2 + 3xy + 3y^2$
- b) $2x^2 - 2xy - y^2$
- c) $-x^2 + 2xy - 2y^2$
- d) $3y^2 - 2x^2$

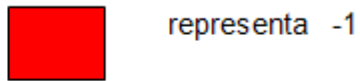
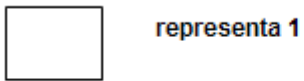
Para representar polinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ se usará:

- 1) Un cuadrado de color azul de lado "x" cuya área esta representada por x^2 . Un cuadrado de color rojo de las mismas dimensiones representa $-x^2$.

Así



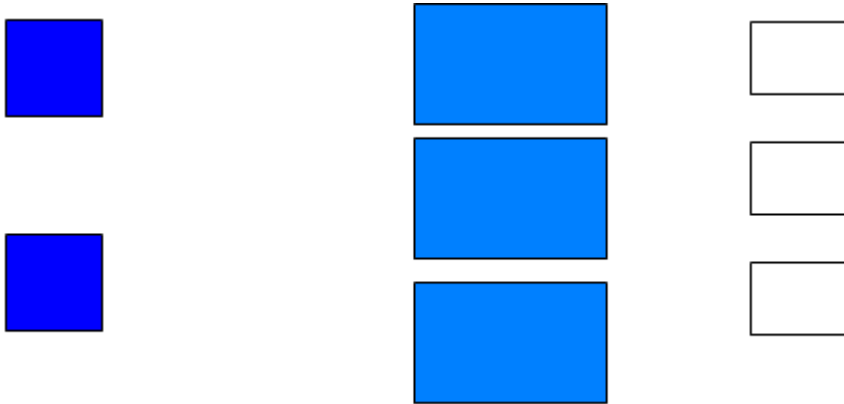
- 2) Un cuadrado de color blanco de lado igual a 1 (uno) de manera que su área sea igual a
1. Un cuadrado de color rojo de las mismas dimensiones representa -1.



- 3) Un rectángulo celeste de lados x y 1 (uno), cuya área sea x.
Un rectángulo de color rojo de las mismas dimensiones representa -x.



Así el polinomio $2x^2 + 3x + 3$ se representaría



Para representar la suma de un polinomio se colocan juntas las figuras que representan figuras semejantes y si necesario se utiliza el “principio del cero”

Ejemplo: $(2x^2 + 3xy + y^2) + (x^2 + xy + 2y^2)$

Se eliminan primero los paréntesis y se colocan en columnas los términos semejantes.



Contando figuras se obtiene: $3x^2 + 4xy + 3y^2$

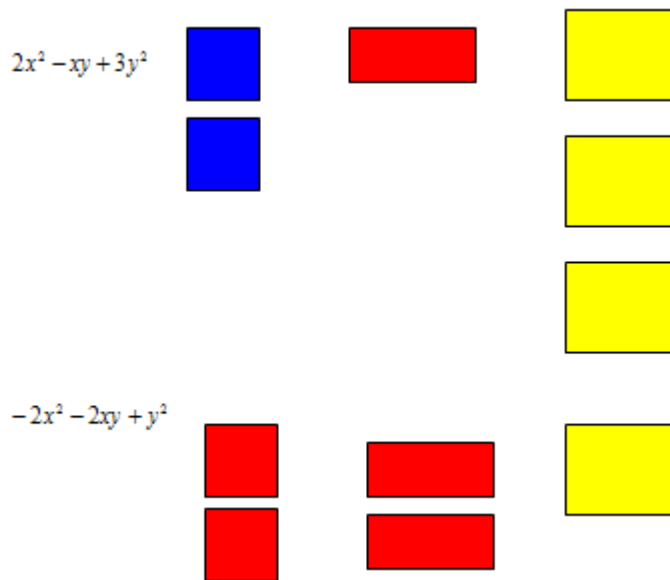
Resta de Polinomios: Este caso se trabajará de una manera similar a la suma de polinomio.

Ejemplo:

$(2x^2 - xy + 3y^2) - (2x^2 + xy - y^2)$

Primero se eliminan los paréntesis tomando en cuenta que al multiplicar por -1 se cambia de signo a los términos del sustraendo (el cambio de signo implica cambiar la ficha a color rojo).

Luego de eliminar se colocan en columnas los términos semejantes.



Contando figuras y aplicando el principio del cero se obtiene:

$$0x^2 - 3xy + 4y^2 = -3xy + 4y^2$$

Se plantearán las siguientes sumas y restas de polinomios para que el estudiante las resuelva aplicando en procedimiento anterior:

- $(2x^2 + 3xy + y^2) + (x^2 + xy + 2y^2)$
- $(x^2 - 2xy - 2y^2) + (x^2 + xy + y^2)$
- $(x^2 + 3x - 1) - (x^2 - x + 3)$
- $(3x^2 - xy + 3y^2) - (2x^2 + 2xy - y^2)$

7. RESULTADOS

El punto de partida consistió en determinar el nivel de entrada de un grupo de control y otro experimental antes de iniciar el estudio de los contenidos del programa de Álgebra de octavo año.

Se aplicó una prueba de ingreso o de diagnóstico tanto al grupo de control como al experimental, que permitió determinar si los estudiantes poseían las condiciones y los requisitos previos para iniciar el estudio de los contenidos propuestos: Suma y resta de monomios y suma y resta de polinomios.

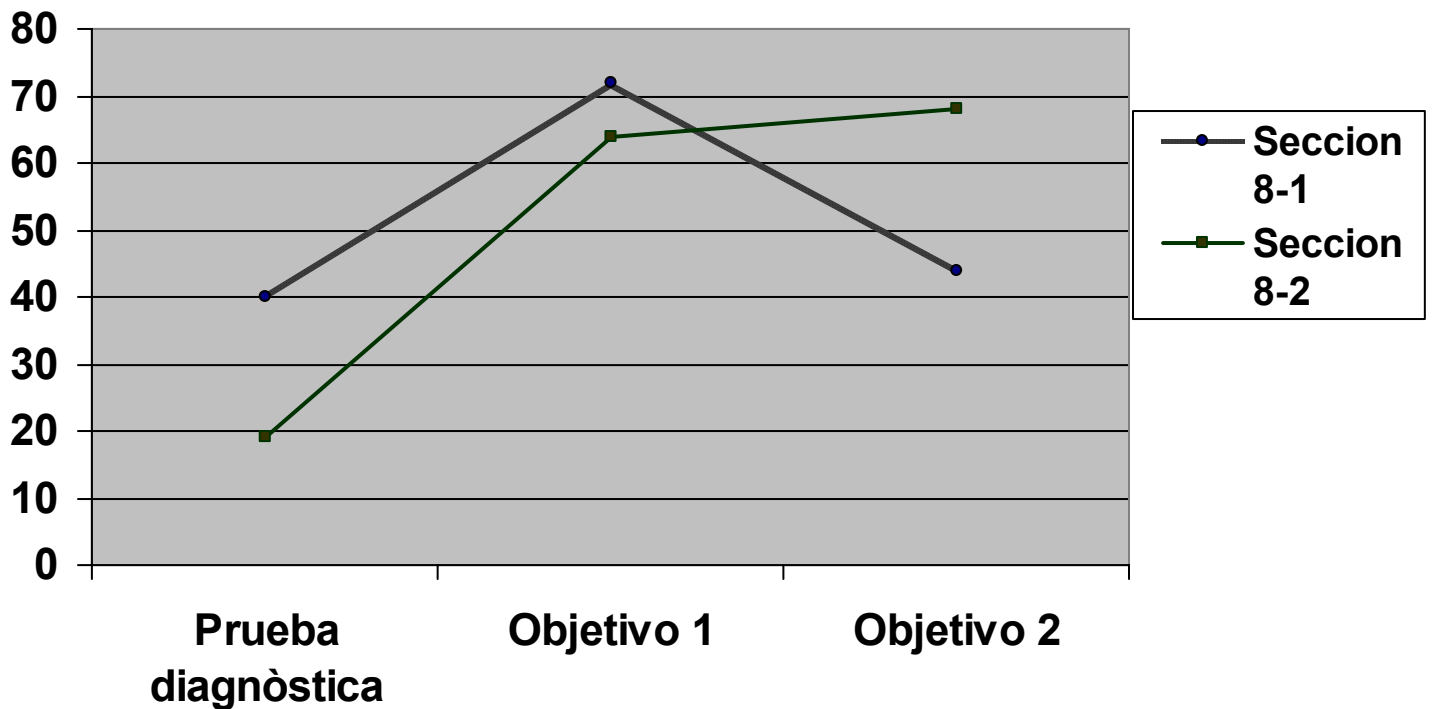
Se dio inicio a la aplicación de la propuesta iniciando con el tema de la suma de monomios, tema que se evaluó en la I prueba sumativa.

Finalmente se aplicó la II prueba formativa donde se evaluó el tema de suma y resta de polinomios.

Los resultados obtenidos en la tres pruebas aplicadas se muestran en el siguiente grafico

Grafico 1

Porcentajes de rendimiento de la prueba diagnóstica y rendimiento de objetivos 1 y 2 en pruebas sumativas aplicadas durante la aplicación de la propuesta metodológica.



En el gráfico anterior se observa que la variación del grupo experimental con respecto al grupo control fue positiva. La sección 8-1 inicia con un nivel más alto que la sección 8-2. Al evaluarse el objetivo 1 (Sumar y restar de monomios) ambos grupos muestran un crecimiento positivo. A partir de este momento el grupo de control disminuye su rendimiento y sólo tiene un leve aumento con respecto al nivel inicial. El grupo experimental continúa mejorando hasta alcanzar su punto máximo al evaluarse el objetivo 2 (Sumar y restar de polinomios). Es claro que este

grupo mantuvo un crecimiento positivo durante la implementación de la propuesta lo que indica que ésta contribuyó en forma positiva a elevar el rendimiento en objetivos terminales.

En la Unidad Pedagógica Dr. Rafael Calderón Guardia se obtuvieron resultados muy positivos en la prueba sumativa que se aplicó aunque la propuesta no se ha evaluado en su totalidad.

8. CONCLUSIONES

Con base en los resultados obtenidos al final del desarrollo de la investigación se concluye:

- El grupo de control obtuvo una variación porcentual del 8% entre los perfiles de entrada y salida. Dicha variación no se considera significativa ya que no supera el 10%. Lo anterior permite deducir que dicho grupo continua arrastrando las mismas deficiencias que mostró al inicio de la aplicación de la propuesta. así son estudiantes que enfrentarían serias dificultades para afrontar el estudio de los diversos temas a estudiar relacionados con este objetivo en niveles superiores.
- El grupo experimental obtuvo una variación porcentual del 40% entre los perfiles de entrada y salida. Dicha variación se considera muy significativa ya que supera el 10%. Lo anterior permite deducir que dicho grupo superó las deficiencias que mostró al inicio de la aplicación de la propuesta.
Los estudiantes de dicho grupo tienen las base suficientes para asimilar adecuadamente temas como son la solución de ecuaciones, tema básico en el estudio del Algebra.
- El uso de material concreto pudo influir de manera significativa en los resultados obtenidos ya que los estudiantes del grupo experimental pudieron realizar las operaciones de suma y resta tanto de monomios como de polinomios de forma intuitiva usando las fichas de colores y aplicando reglas fáciles de entender, casi como en un juego.

8. RECOMENDACIONES

De acuerdo con el análisis de resultados obtenido se recomienda las siguientes acciones a las diferentes personas o entidades involucradas en el proceso de la enseñanza de la matemática y especialmente el Algebra.

AL MINISTERIO DE EDUCACIÓN.

- Brindar mayores posibilidades de capacitación a los docentes de Matemática.
- Crear posibilidades para que los docentes participen de cursos o pasantías en países donde la enseñanza de la matemática tenga un mayor desarrollo.
- Permitir que se disminuya el número de estudiantes por grupo para que así el docente pueda brindar una atención más individualizada a sus estudiantes y aumentar la eficiencia en el uso de los recursos disponibles.
- Implementar el uso de las tecnologías de la información, la comunicación y el conocimiento al sistema educativo para mejorar la calidad de la educación.

A LOS DOCENTES DE MATEMÁTICA.

- Aplicar pruebas diagnósticas al iniciar el estudio de una unidad de trabajo para a partir de los resultados obtenidos tomar las medidas necesarias con el propósito de proporcionar a los estudiantes las condiciones necesarias para iniciar bien el proceso de aprendizaje.
- Antes de iniciar una unidad de trabajo buscar información referente a metodologías referentes a ese tema para ser utilizadas con el fin de diseñar actividades de mediación que permitan al estudiante ser partícipe del proceso de construcción del conocimiento.
- Estar siempre anuente al uso de los nuevos recursos y medios de las tecnologías de información para ayudar a sus alumnos en la construcción de nuevos conocimientos.
- Mantenerse en constante capacitación en todas las áreas relacionadas con su labor y el mejoramiento personal a través de los diferentes medios como son las capacitaciones

que brinda el MEP, cursos, lectura de libros de autoayuda, artículos en los medios de prensa y otros.

- Diseñar actividades de mediación que tomen en cuenta tanto la madurez emocional como cognitiva del educando.
- Tomar el tiempo necesario para desarrollar un objetivo. El trabajo de aula permite al docente verificar si los estudiantes han asimilado de manera adecuada un objetivo. De ser necesario debe dedicarse más tiempo del planeado al desarrollo de un objetivo.
- Fomentar el uso de material concreto para permitir al estudiante la asimilación de conceptos abstractos. Este recurso puede ser utilizado en casi todos los temas a desarrollar en secundaria como geometría y álgebra por ejemplo. Al estudiar un determinado concepto es de suma importancia que el estudiante desarrolle la etapa de manipulación antes de la representación simbólica de este.
- Compartir con los docentes de materia de la región alguna idea novedosa para desarrollar un tema determinado.

A LOS PADRES DE FAMILIA.

- Fomentar en sus hijos actitudes positivas hacia la materia de tal manera que desde el hogar el estudiante construya un concepto positivo de ésta y de su importancia para resolver tanto problemas de la vida cotidiana como sistematizada.
- Fomentar en su hogar juegos como rompecabezas, ajedrez y otros que desarrollen el pensamiento lógico del niño y adolescente.
- Incentivar el hábito de la lectura en el hogar, ya que esta es una de las grandes debilidades del estudiante al leer un problema de matemática.

9. Referencias bibliográficas

- Abarca, S. (2002) Psicología del niño en edad escolar. San José, Costa Rica Editorial EUNED.
- Castillo T. & Espeleta V. (1996). La Matemática: Su enseñanza y aprendizaje, San José, Costa Rica. Editorial EUNED.
- Ministerio de Educación Pública. MEP. (2000). Antología de Matemática Noveno Año. San José.
- Ministerio de Educación Pública. MEP. (2001). Programa de estudios de Matemática. III Ciclo. San José.
- Papalia D. & Wendkos R. (1996) Psicología del desarrollo. De la infancia a la adolescencia. México. Fuentes Impresores S.A.,

